Zusammenfassung Mathematik

(Version 1.0)

von

Patrice Neff
BIA 99b

Mathestoff BMS von 1999 bis 2003

Berufsmaturitätsschule Zürich
Im Februar 2003

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Dieses Dokument wurde von Patrice Neff zur Vorbereitung auf die Mathematik Prüfung erstellt. Es ist lizenziert unter der GNU Free Documentation License Version 1.1. Details zu der Lizenz finden sich in Anhang B.

Der Inhalt dieses Dokumente ist zum Teil nicht komplett, vor allem da wo das entsprechende Wissen bei mir bereits gut gefestigt war. So wird zum Beispiel die Winkelsumme des Dreiecks nicht erwähnt. Für weitere Informationen und vollständigere Dokumente kann die Bibliographie beigezogen werden.

Teil 1

Algebra

2 Polynome

2.1 Binomische Formeln

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

3 Potenzieren

3.1 Begriffe

a^n: Die Basis **a** wird mit dem Exponenten **n** potenziert.

3.2 Potenzgesetze

Addition gleicher Exponenten: $a^3 + a^3 + a^3 + a^3 = 4a^3$

Multiplikation gleicher Basen: $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

Multiplikation gleicher Exponenten: $a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$

Division gleicher Basen: $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

Division gleicher Exponenten: $\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$

Potenz von Potenz: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

4 Radizieren

Die n-te Wurzel aus a ist die **nicht-negative** Zahl x, deren n-te Potenz a ergibt:
$\boxed{\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a}$

4.1 Gesetze

Die Wurzel $\sqrt[n]{a}$ kann auch als Potenz $a^{\frac{1}{n}}$ dargestellt werden. Die Potenzgesetze sind hier entsprechend auch anwendbar.

5 Gleichungen

5.1 Lineare Gleichungen

5.1.1 Allgemeine Form

Die allgemeine Form der linearen Gleichung ist $ax + b = 0$.

5.1.1.1 Beispiel

Ist die Gleichung $\frac{4}{x} = 5x$ linear?
Die allgemeine Form lautet $5x^2 - 4 = 0$. Es kommt x^2 vor, deshalb ist die Gleichung nicht linear.

5.2 Lineare Gleichungssysteme

5.2.1 Gleichsetzungsverfahren

Die beiden Gleichungen werden nach der gleichen Variable aufgelöst. Danach können die entstandenen Gleichungen gleichgesetzt und nach der übrig gebliebenen Variabel aufgelöst werden.

5.2.1.1 Beispiel

$$\left| \begin{array}{r} 6x + 2y = -2 \\ 15x + 10y = 5 \end{array} \right| \tag{5.1}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{r} y = -3x - 1 \\ y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \end{array} \right| \tag{5.2}$$

$$\Rightarrow -3x - 1 = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \tag{5.3}$$

$$\Rightarrow -6x - 2 = -3x + 1 \Rightarrow -3x = 3 \Rightarrow x = -1 \tag{5.4}$$

Die zweite Unbekannte kann durch einsetzen berechnet werden.

$$y = -3(-1) - 1 \Rightarrow y = 2 \tag{5.5}$$

Probe:

$$6(-1) + 2(2) = -2 \tag{5.6}$$

$$15(-1) + 10(2) = 5 \tag{5.7}$$

5.2.2 Einsetzungsverfahren

Eine der beiden Gleichungen wird nach einer der Unbekannten aufgelöst. Danach kann die entstandene Gleichung in die andere eingesetzt werden.

$$\left| \begin{array}{r} 6x + 2y = -2 \\ 15x + 10y = 5 \end{array} \right| \tag{5.8}$$

$$6x + 2y = -2 \Rightarrow y = -3x - 1 \tag{5.9}$$

$$15x + 10y = 5 \tag{5.10}$$
$$\Rightarrow 15x + 10(-3x - 1) = 5 \Rightarrow 15x - 30x - 10 = 5 \Rightarrow -15x = 15 \tag{5.11}$$
$$\Rightarrow x = -1 \tag{5.12}$$

Die zweite Unbekannte kann durch einsetzen berechnet werden.

5.2.3 Additionsverfahren

Von der ersten Gleichung wird ein Vielfaches der zweiten Gleichung abgezogen, so dass eine der Variabeln wegfällt.

$$\left| \begin{array}{r} 6x + 2y = -2 \\ 15x + 10y = 5 \end{array} \right| \tag{5.13}$$
$$\left| \begin{array}{r} 6x + 2y = -2 \\ -\frac{1}{5}(15x + 10y = 5) \end{array} \right| \Rightarrow 3x = -3 \tag{5.14}$$
$$\Rightarrow x = -1 \tag{5.15}$$

Die zweite Unbekannte kann durch einsetzen berechnet werden.

5.2.4 Eliminationsverfahren von Gauss

Für Gleichungssysteme mit **mehr als zwei Unbekannten** kann das Eliminationsverfahren angewendet werden. Dabei wird ein neues Gleichungssystem erstellt, bei welchem in jeder Gleichung eine Unbekannte weniger vorkommt, so dass in der letzten Gleichung mit einer Unbekannten gearbeitet werden kann.

Das Vorgehen sieht wie folgt aus:

1. Alle Unbekannte eliminieren:
   a) Bei Gleichungen 2 bis n die erste Unbekannte eliminieren:
      i. Gleichung 1 und 2 addieren, so dass die erste Unbekannte wegfällt[1].
      ii. Genau gleich mit Gleichung 1 und 3.
      iii. Und so weiter bis Gleichung n.
   b) Bei Gleichungen 3 bis n die zweite Unbekannte eliminieren.
   c) Und so weiter, bis die Gleichung n nur noch eine Unbekannte enthält.
2. Gleichungen auflösen:
   a) Die Gleichung n auflösen.
   b) Die gefundene Unbekannte in die Gleichung $n - 1$ einsetzen und diese auflösen.
   c) Und so weiter bis zur Gleichung 1.

[1] Für diesen Schritt muss eine Gleichung so multipliziert werden, dass die zu streichende Unbekannte wegfällt. Angenommen wir addieren $5x + 3y = 12$ und $7x + 9y = 10$, so muss $7x + 9y = 10$ mit $-\frac{5}{7}$ multipliziert werden um x zu streichen.

5.3 Bruchgleichungen

Eine Gleichung heisst Bruchgleichung, wenn die Unbekannte mindestens einmal im Nenner vorkommt. Zum Lösen werden erst die Nenner mit den Unbekannten wegmultipliziert. Danach kann die Gleichung auf herkömmliche Art und Weise gelöst werden.

Bei der Angabe der Lösung muss jedoch die Definitionslücke gekennzeichnet werden. Ein Nenner darf ja nicht Null sein. Die Definitionslücken sind jene Werte für die Unbekannte, welche mindestens einen der Nenner auf Null setzen würde.

Wenn bei der Auflösung der Gleichung die Unbekannte ein Element der Menge der Definitionslücke ist, dann ist die Lösungsmenge leer.

5.3.1 Beispiel

$$\begin{aligned} \frac{99}{3x} &= 15 \\ \Rightarrow 99 &= 45x \\ \Rightarrow 2.2 &= x \end{aligned} \tag{5.16}$$

Die Definitionslücke liegt bei $3x = 0$, also $x = 0$. $x = 2.2$ ist also eine erlaubte Lösung: $\mathbb{L} = 2.2$.

5.4 Quadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ heisst „quadratische Gleichung" oder „Gleichung zweiten Grades".

ax^2: Quadratisches Glied

bx: Lineares Glied

c: Konstantes Glied

a, b, c: Koeffizienten

5.4.1 Sonderfälle

$$\begin{aligned} ax^2 + c &= 0 && \text{reinquadratisch } (b = 0) \\ ax^2 + bx &= 0 && \text{gemischt-quadratisch } (c = 0) \end{aligned}$$

5.4.1.1 Reinquadratische Gleichung

Die reinquadratische Gleichung hat entweder zwei reele oder keine Lösung.

Zur Lösung wird die Gleichung nach x^2 aufgelöst und dann die Wurzel gezogen.

5.4.1.2 Beispiel

$$\begin{aligned} 4x^2 - 40 &= -4 \\ 4x^2 &= 36 \\ x^2 &= 9 && \text{Wurzel ziehen} \\ x_1 &= 3,\ x_2 = -3 \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \{3, -3\}$

5.4.1.3 Gemischt-quadratische Gleichung

Die gemischt-quadratische Gleichung hat immer zwei Lösungen, von denen eine 0 ist.

Zur Lösung wird die Gleichung nach 0 aufgelöst. Danach x ausklammern. Die ganze Gleichung ist 0, wenn einer der beiden enstandenen Klammerausdrücke 0 ist.

Achtung: Nicht durch x dividieren, weil dann die Lösung $x = 0$ verloren geht.

5.4.1.4 Beispiel

$$\begin{aligned} 8x^2 &= \frac{2x}{3} \\ 24x^2 &= 2x \\ 24x^2 - 2x &= 0 \\ 12x^2 - x &= 0 \\ x(12x-1) &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned} 12x - 1 &= 0 \\ 12x &= 1 \\ x_2 &= \frac{1}{12} \end{aligned} \tag{5.18}$$

$\mathbb{L} = \{0, \frac{1}{12}\}$

5.4.2 Lösungsformel

Die Lösungsformel kann für jede quadratische Gleichung angewendet werden.

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{5.19}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{5.20}$$

Der Term unter der Wurzel ($b^2 - 4ac$, Diskriminante genannt) ist entscheidend für die Lösbarkeit.

$D > 0$: Zwei verschiedene Lösungen

$D = 0$: Eine Lösung

$D < 0$: Keine Lösung

5.5 Wurzelgleichungen

Bei einer Wurzelgleichung kommt die Lösungsvariable mindestens einmal unter einer Wurzel vor.

5.5.1 Vorgehen

Lösung durch quadrieren. Dies kann zu Scheinlösungen führen, deshalb immer die Probe durchführen.

5.5.2 Beispiele

5.5.2.1 Beispiel 1

$$\sqrt{2x} = \sqrt{x-1} \qquad \text{quadrieren} \tag{5.21}$$
$$\Rightarrow 2x = x - 1 \Rightarrow x = -1 \tag{5.22}$$

Probe:

$$\sqrt{2 \cdot -1} = \sqrt{-1-1} \Rightarrow \sqrt{-2} = \sqrt{-2} \qquad \text{ungültig, da Wurzelausdruck negativ} \tag{5.23}$$

$$\mathbb{L} = \{\} \tag{5.24}$$

5.5.2.2 Beispiel 2

$$3\sqrt{3-x} = 2(2-x) \qquad \text{quadrieren} \tag{5.25}$$
$$\Rightarrow 9(3-x) = 4(2-x)^2 \qquad \text{vereinfachen} \tag{5.26}$$
$$\Rightarrow 11 + 7x - 4x^2 = 0 \qquad \text{Lösungsformel} \tag{5.27}$$
$$x_1 = \frac{11}{4}, x_2 = -1 \tag{5.28}$$

Probe für $x_1 = \frac{11}{4}$:

$$3\sqrt{3 - \frac{11}{4}} = 2(2 - \frac{11}{4}) \Rightarrow 3\sqrt{\frac{1}{4}} = 2(-\frac{3}{4}) \tag{5.29}$$
$$\Rightarrow \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \qquad \text{false} \tag{5.30}$$

Probe für $x_2 = -1$:

$$3\sqrt{3+1} = 2(2+1) \tag{5.31}$$
$$\Rightarrow 6 = 6 \qquad \text{true} \tag{5.32}$$

$$\mathbb{L} = \{-1\} \tag{5.33}$$

5.6 Exponentialgleichungen

Zum Lösen von Exponentialgleichungen werden meistens Logarithmen verwendet (Siehe 7 auf Seite 21). Die Tatsache $a^x = b \Rightarrow x = log_a(b)$ hilft uns dabei.

Es ist einzig manchmal schwierig, ein klares a^x zu extrahieren. Zum Beispiel in der Gleichung $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 2$. Da jedoch $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, gilt $2^x + 2 \cdot 2^x + 2^2 \cdot 2^2 = 2 \Rightarrow 2^x(1+2+4) = 2$, was wieder leicht aufgelöst werden kann.

5.7 Logarithmische Gleichungen

Vorgehen wenn alle Logarithmen die gleiche Basis haben.

1. Auf beiden Seiten alle Logarithmen ausser einem wegschaffen. Dies ist mit den Regeln für Logarithmen möglich (siehe Abschnitt 7.3 auf Seite 21).

2. Nun sind zwei Logarithmen in der Form $\log_a(x) = \log_a(y)$ übrig. Daraus folgt, dass $x = y$. Diese Gleichung kann leicht aufgelöst werden.

6 Funktionen

6.1 Lineare Funktionen

Eine Funktion der Form $f(x) = y = mx + q, m \neq 0$ heisst lineare Funktion.
m gibt die Steigung an. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = m.
q heisst y-Achsenabschnitt und gibt den Schnittpunkt der Linie mit der y-Achse an.

6.1.1 Grundaufgaben

Im folgenden werden die beiden Grundaufgaben zur linearen Funktion darsgestellt.

6.1.1.1 Grundaufgaben 1

Gegeben sei die Steigung m und der Geradepunkt $A(x_A/y_A)$. Gesucht ist die Gleichung der Gerade.
Diese Aufgabe kann gelöst werden indem x_A und y_A in die Gleichung $y = mx + q$ eingesetzt wird: $y_A = m \cdot x_A + q$. Die Gleichung kann nun nach q aufgelöst werden.

Beispiel Gegeben sei $m = \frac{3}{4}$ und der Punkt $A(4/7)$.

$$\begin{aligned} 7 &= \frac{3}{4} \cdot 4 + q \\ \Rightarrow 7 &= 3 + q \Rightarrow 4 = q \end{aligned} \tag{6.1}$$

6.1.1.2 Grundaufgabe 2

Gegeben seien die beiden Geradenpunkte $A(x_A/y_A)$ und $B(x_B/y_A)$. Gesucht ist die Geradengleichung.
m lässt sich leicht aus $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ berechnen. Danach kann gleich vorgegangen werden wie bei der Grundaufgabe 1.

6.2 Quadratische Funktionen

6.2.1 Definition

Eine Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ heisst quadratische Funktion.
Die einfachste quadratische Funktion hat die Funktionsgleichung $y = f(x) = x^2$.

6.2.2 Formen

Parabeln können in folgenden drei Formen ausgedrückt werden:

Grundform	$y = ax^2 + bx + c$
Scheitelform[1]	$y = a(x + b)^2 + c$
Nullstellenform[2]	$y = a(x + p)(x + q)$

[1] Auch allgemeine Form
[2] Auch Produktform

6.2.3 Eigenschaften der Parabel

Die Parabelgleichung $y = a(x - u)^2 + v$, $a \neq 0$ beschreibt eine Parabel mit folgenden Eigenschaften:

- Öffnung nach oben falls $a > 0$, nach unten falls $a < 0$
- Normalparabel falls $|a| = 1$
  - Schlanker falls $|a| > 1$
  - Breiter falls $|a| < 1$, $a \neq 0$
- Verschiebungen:
  - In y-Richtung um v
  - In x-Richtung um $-u$

6.2.4 Schnittpunkte mit Achsen

6.2.4.1 x-Achse

Die x-Achse wird bei $y = 0$ geschnitten. Deshalb kann die Parabelgleichung $y = 0 = a(x - u)^2 + v$ nach x aufgelöst werden. Dies gibt 0, 1 oder 2 Lösungen.

6.2.4.2 y-Achse

Die y-Achse wird bei $x = 0$ geschnitten. In der Parabelgleichung $y = a(x - u)^2 + v$ kann also $x = 0$ eingesetzt werden. Die resultierende Gleichung $y = a(-u)^2 + v$ kann berechnet werden.

6.2.5 Scheitelkoordinate berechnen

Aus der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ kann die Scheitelkoordinate als $S\left(-\frac{b}{2a}/\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ berechnet werden. Ist die Form $y = a(x - u)^2 + v$ gegeben so ist die Scheitelkoordinate gleich $S(u/v)$.

6.2.6 Nullstellenform berechnen

Die Nullstellenform ist $y = a(x + p)(x + q)$.

Die beiden Nullstellen $-p$ und $-q$ lassen sich dabei aus der quadratischen Gleichung $y = 0 = ax^2 + bc + c$ berechnen.

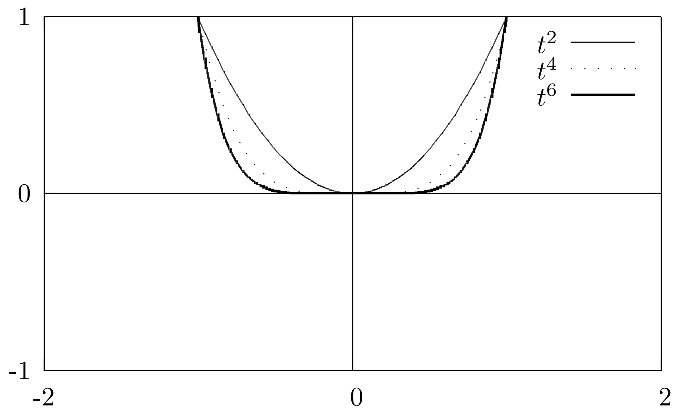
6.3 Potenzfunktionen

6.3.1 Begriff der Pozenzfunktion

Potenzfunktionen haben die allgemeine Form $f(x) = a \cdot x^n$.

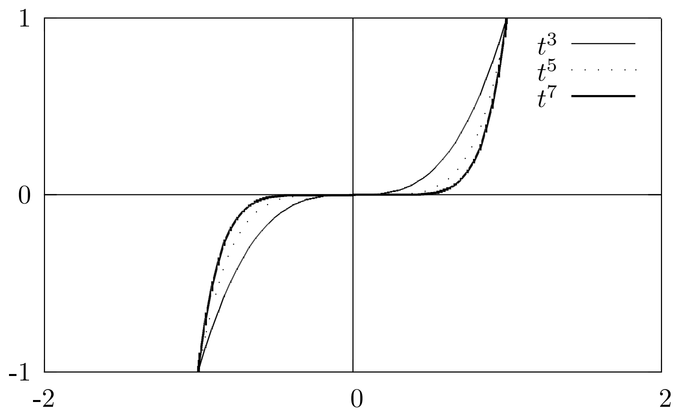
6.3.2 Graphen der Potenzfunktionen

6.3.2.1 Gerader natürlicher Exponent



Definitionsmenge:	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Wertemenge:	$\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$
Symmetrie:	Achsensymmetrie bezüglich y-Achse

6.3.2.2 Ungerader natürlicher Exponent

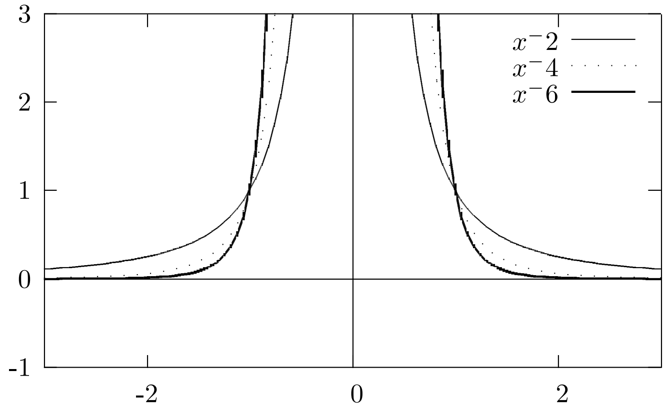


Definitionsmenge:	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Wertemenge:	$\mathbb{W} = \mathbb{R}$
Symmetrie:	Punktsymmetrie bezüglich Koordinatenzentrum

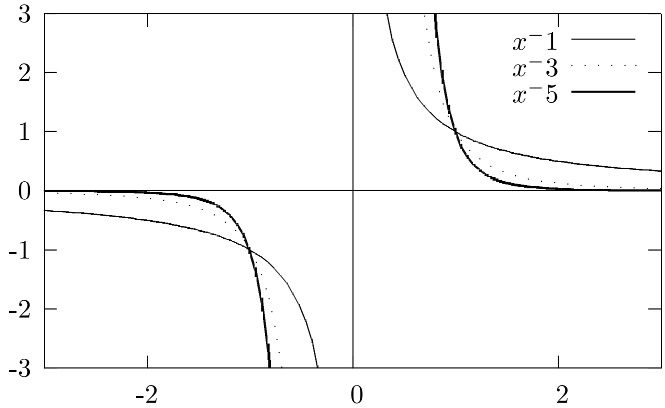
6.3.3 Potenzfunktionen mit ganzzahligem negativem Exponenten

Gemäss Potenzgesetz gilt: $x^{-n} = \frac{1}{x^n} = (\frac{1}{x})^n$

6.3.3.1 Gerader negativer Exponent



6.3.3.2 Ungerader negativer Exponent (Hyperbel)



6.3.4 Berechnungen

Im folgenden einige Werte, welche potentiell verlangt werden. Bei allen Beispielen wird von der Gleichung $y = \frac{1}{x^2} + 3$ ausgegangen.

6.3.4.1 Vertikale Asymptote, Polstellen

Die vertikale Asymptote ist für all jene x-Werte definiert, für welche die Lösungsmenge leer ist. Dies ist dann der Fall, wenn einer der Nenner 0 ergibt. Es können nun also die Nenner als Gleichung mit Null gleichgesetzt und aufgelöst werden.

Ein Pol bzw. Polstelle ist ein Schnittpunkt einer vertikalen Asymptote mit der x-Achse. Die Berechnung der Polstellen und der vertikalen Asymptote sind also gleich.

Im Beispiel ist der einzige Nenner x^2. Die Gleichung $x^2 = 0$ wird nach $x = 0$ aufgelöst. Die vertikale Asymptote ist also 0 und die Polstelle $P = 0/0$.

6.3.4.2 Horizontale Asymptote

Die horizontale Asymptote ist dann erreicht, wenn x gegen unendlich geht. Also kann $x = \infty$ eingesetzt werden.

Im Beispiel geht y dabei gegen 3, da $\frac{1}{\infty^2}$ gegen 0 geht.

6.3.4.3 Nullstelle

Um die Nullstellen zu berechnen wird $y = 0$ angenommen. $0 = \frac{1}{x^2} + 3$ ergibt $\sqrt{\frac{-1}{3}}$, was keine gültige Lösung ist: $\mathbb{L} = \{\}$.

6.3.4.4 Mengen

Die Mengen $\mathbb{D}$ und $\mathbb{W}$ bestehen aus den reellen Zahlen, jedoch ohne die Asymptoten bzw. Polstellen.
Achtung: Zur Bestimmung der Definitionsmenge darf die Gleichung nicht gekürzt werden.
Im Beispiel gilt also $\mathbb{D} = x = \mathbb{R}|x \neq 0$ und $\mathbb{W} = y = \mathbb{R}|x \neq 0$

6.3.4.5 Beispiel für Berechnung (einfach)

Gegeben ist folgende Parabelfunktion:

$$f(x) = \frac{1}{x+5} - 2$$

Vertikale Asymptote, Polstelle Nenner muss 0 sein.

$$\begin{aligned} x + 5 &= 0 \\ \Rightarrow x &= -5 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Horizontale Asymptote

$$\begin{aligned} &x \to \infty \\ \Rightarrow &\frac{1}{x+5} \to 0 \\ \Rightarrow &f(x) \to -2 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Die horizontale Asymptote ist bei $x = -2$.

Mengen

$$\mathbb{D} = x \in \mathbb{R} \mid x \neq -5 \tag{6.4}$$
$$\mathbb{W} = y \in \mathbb{R} \mid y \neq -2 \tag{6.5}$$

Nullstelle

$$\begin{aligned} y = f(x) = 0 &= \frac{1}{x+5} - 2 \\ x + 5 &= \frac{1}{2} \\ x &= -\frac{9}{2} \end{aligned} \tag{6.6}$$

6.3.4.6 Beispiel für Berechnung (komplexer)

Gegeben ist folgende Parabelfunktion:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x+2)(x-1)}$$

Vertikale Asymptote, Polstellen Nenner muss 0 sein.

$$x_1 = -2 \tag{6.7}$$
$$x_2 = 1 \tag{6.8}$$

Horizontale Asymptote Die horizontale Asymptote ist bei $x = 0$. Denn wenn $x \to \infty$, gehen sowohl Zähler als auch Nenner gegen 0.

Mengen

$$\mathbb{D} = x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2, x \neq -2, x \neq 1 \tag{6.9}$$
$$\mathbb{W} = y \in \mathbb{R} \mid y \neq 0 \tag{6.10}$$

Nullstellen

$$x_1 = -2 \tag{6.11}$$
$$x_2 = 1 \tag{6.12}$$
$$\tag{6.13}$$

6.3.5 Diverse Aufgaben

Bestimmung von n

Bestimmen Sie eine Potenzfunktion $y = x^n$, deren Graph durch den Punkt P geht: $P(-2/-128)$.

$$y = x^n \Rightarrow -128 = -2^n \Rightarrow -2^7 = -2^n \tag{6.14}$$
$$\Rightarrow n = 7 \tag{6.15}$$

Bestimmung von a und n

Bestimmen Sie a und n so, dass der Graph von $f(x) = ax^n$ durch die Punkte P und Q geht: $P(1/0.5), Q(2/4)$

$$\left| \begin{array}{r} 0.5 = a \cdot 1^n \\ 4 = a \cdot 2^n \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a = \dfrac{0.5}{1^n} \\ a = \dfrac{4}{2^n} \end{array} \right| \tag{6.16}$$
$$\Rightarrow \frac{0.5}{1^n} = \frac{4}{2^n} \Rightarrow \frac{0.5 \cdot 2^n}{1^n} = 4 \Rightarrow 2^n = 8 = 2^3 \tag{6.17}$$
$$\Rightarrow n = 3 \tag{6.18}$$

$$0.5 = a \cdot 1^3 \Rightarrow \frac{0.5}{1^3} = a \tag{6.19}$$
$$\Rightarrow 0.5 = a \tag{6.20}$$

Die resultierende Gleichung ist also $f(x) = 0.5 \cdot x^3$.

6.4 Exponentialfunktionen

6.4.1 Definition

Eine Funktion der Form $y = a^x;\ x \in \mathbb{R};\ a \in \mathbb{R}^+ \backslash 1$ heisst Exponentialfunktionen.

Definitionen

- a ist die Basis.
- x steht im Exponenten und nur im Exponenten.
- $a > 1$ oder $0 < a < 1$. a also nicht negativ und nicht 1.

Achsen

- Exponentialfunktionen $y = a^x$ und $y = a^{-x}$ sind symmetrisch bezüglich der y-Achse.
- Die Graphen nähern sich asymptotisch der x-Achse, schneiden sie also nie.

6.4.2 Transformation

$y = c \cdot u^{a \cdot x + b} + d$

Parameter

a: Streckung/Stauchung in x-Richtung, Spiegelung an y-Achse wenn $a = -1$

b: Verschiebung in x-Richtung (nach links wenn $b > 0$)

c: Streckung/Stauchung in y-Richtung, Spiegelung an x-Achse wenn $c = -1$

d: Verschiebung in y-Richtung (nach oben wenn $d > 0$)

6.5 Umkehrfunktionen

6.5.1 Definition

Eine Funktion besitzt dann eine Umkehrfunktion, wenn pro x-Wert nur ein y-Wert existiert. Dies kann auf dem Graphen nachgeprüft werden. Gegebenfalls ist die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ entsprechend einzuschränken.

6.5.2 Berechnen der Umkehrfunktion

Am Beispiel der Funktion $y = x^2$

1. x und y tauschen: $x = y^2$
2. Gleichung nach y auflösen: $y = \sqrt{x}$

7 Logarithmen

$b = a^x$: x ist der Logarithmus der Zahl b zur Basis a. $\boxed{x = \log_a(b)}$.
Bedingungen: $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $a \neq 1$.

7.1 Eigenschaften

$$\begin{aligned}
\log_a(a) &= 1 && \text{Exponentialform } a^1 = a \\
\log_a(1) &= 0 && \text{Exponentialform } a^0 = 1 \\
\log_a(a^x) &= x && \text{Exponentialform } a^x = a^x \\
a^{\log_a(b)} &= b && \text{Logarithmusform } \log_a(b) = \log_a(b)
\end{aligned}$$

7.2 Besondere Logarithmen

$$\log_{10}(x) = \log(x) \tag{7.1}$$

$$\log_e(x) = \ln(x) \tag{7.2}$$

7.3 Rechengesetze

7.3.1 Produkt

Logarithmus aus einem Produkt wird aus der Summe der Logarithmen der Faktoren gebildet.
$\boxed{log_a(u \cdot v) = log_a(u) + log_a(v)}$

7.3.2 Division / Bruch

Logarithmus aus einem Bruch ist gleich dem Logarithmus des Zählers minus dem Logarithmus des Nenners.
$\boxed{log_a\left(\frac{u}{v}\right) = log_a(u) - log_a(v)}$

7.3.3 Potenz

Logarithmus aus einer Potenz wird aus dem Logarithmus der Basis multipliziert mit dem Exponenten gebildet.
$\boxed{log_a(u^v) = v \cdot log_a(u)}$

7.3.4 Wurzel

$\sqrt[v]{b^u}$ kann als $b^{\frac{u}{v}}$ geschrieben werden, wenn $b>0$. Aufrgund der Regel 7.3.3 gilt deshalb:
$\boxed{\log_a\left(\sqrt[v]{b^u}\right) = \log_a\left(b^{\frac{u}{v}}\right) = \frac{u}{v} \cdot \log_a(b)}$

7.4 Logarithendivision

Ein Logarithmus kann als Quotient mit einer beliebigen Basis c geschrieben werden.

$$\boxed{\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}}$$

Teil 2

Geometrie

8 Planimetrie

Die Planimetrie beschränkt sich hier praktisch auf eine Formel- bzw. Faktensammlung.

8.1 Kreis

Umfang: $U = 2\pi \cdot r = \pi \cdot d$

Fläche: $A = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$

8.1.1 Kreissektor

Bogen: $s = \frac{\pi \cdot \alpha \cdot r}{180}$

Fläche: $A = \frac{\pi \cdot \alpha \cdot r^2}{360}$

8.2 Dreieck

Seitenhalbierende: Schnittpunkt wird Schwerpunkt genannt. Halbierende teilen sich im Verhältnis 2:1.

Inkreis: Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.

Umkreis: Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.

Mittellinie: Verbindet Mittelpunkte zweier Seiten. Parallel zur dritten Seite und halb so lang wie diese.

Höhe: $h_a = c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma$

Fläche: $A = \frac{ah_a}{2}$

8.2.1 Gleichschenkliges Dreieck

$a = c$, $\alpha = \gamma$

Höhe: $h_a = \frac{b \cdot \sqrt{4a^2 - b^2}}{2a} = a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$
$h_b = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2} = \alpha \cdot \cos\frac{\beta}{2}$

Fläche: $A = \frac{b \cdot \sqrt{4a^2 - b^2}}{4} = \frac{a^2 \cdot \sin\beta}{2} = \frac{ab \cdot \sin\alpha}{2}$

8.2.2 Gleichseitiges Dreieck

Höhe: $h = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2}$

Fläche: $A = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4}$

8.3 Drachenviereck

Die beiden Diagnonalen sind e und f, wobei e die Symmetrie-Achse ist.

Fläche: $A = \frac{e \cdot f}{2}$

Symmetrie-Achse: $e = a \cos \frac{\alpha}{2} + b \cos \frac{\gamma}{2}$

Zweite Diagonale: $f = 2a \sin \frac{\alpha}{2} = 2b \sin \frac{\gamma}{2}$

9 Stereometrie

9.1 Der Würfel

- $V = a^3$
- $O = 6a^2$
- Raumdiagonale $d = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$

9.2 Der Quader

- $V = Gh$
- $O = 2G + M = 2(ab + ac + bc)$
- Raumdiagonale $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

9.3 Prisma

- $V = Gh$

9.3.1 Prinzip von Cavalieri

Körper mit inhaltsgleichem Querschnitt in gleichen Höhen haben das gleiche Volumen

9.4 Der gerade Kreiszylinder

- $G = r^2\pi h$
- $M = 2r\pi h$
- $V = G \cdot h$
- $O = 2G + M = 2r\pi(r + h)$

9.5 Der schiefe Kreiszylinder

- $V = Gh = r^2\pi h$

9.6 Das reguläre Tetraeder

- $V = s^3\frac{\sqrt{2}}{12}$
- $O = s^2\sqrt{3}$

9.7 Die Pyramide

- $V = \frac{1}{3}Gh$

9.8 Der Pyramidenstumpf

- $G =$Grundfläche
- $D =$Deckfläche
- $h =$Höhe
- $x =$Höhe der abgeschnittenen Pyramide
- $V = \frac{h}{3}(G + \sqrt{GD} - D)$

9.9 Der quadratische Pyramidenstumpf

- $a_1 =$Untere Seite
- $a_2 =$ Obere Seite
- $h =$Höhe
- $V = \frac{h}{3}(a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2)$

9.10 Der gerade/schiefe Kegel

- $a =$Kegelachse
- $m =$Mantellinie
- $\alpha =$Öffnungswinkel
- $V = \frac{1}{3}r^2\pi h$
- $G = r^2\pi$
- $M = r\pi s$
- $O = G + M$

G, M und O nur für geraden Kegel

9.11 Der Kegelstumpf

- $r =$Radius des oberen Kreises
- $R =$Radius des unteren Kreises
- $h =$Höhe des Kegelstumpfes
- $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + rR + r^2)$

10 Ähnlichkeit

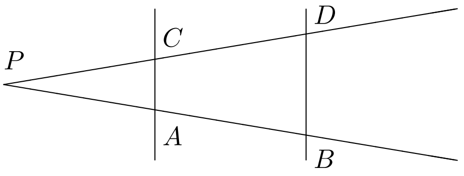
10.1 Ähnliche Dreiecke

Stimmen zwei Dreiecke in zwei Winkeln überein, dann sind sie ähnlich.

Wenn zwei Dreiecke ähnlich sind, dann haben entsprechende Strecken (z.B. Seiten, Höhen, Winkelhalbierende, Umkreisradius) das gleiche Längenverhältnis k.

Die Flächen stehen im Verhältnis k^2, was aus der Flächenformel $\frac{1}{2}c \cdot h_c$ abgeleitet werden kann.

10.2 Strahlensätze



10.2.1 1. Strahlensatz

Die Verhältnisse der Abschnitte auf den beiden Strahlen sind gleich, wenn die Strahlen durch zwei Parallelen geschnitten werden.

$$\overline{SA} : \overline{AB} = \overline{SC} : \overline{CD} \tag{10.1}$$

$$\overline{SA} : \overline{SB} = \overline{SC} : \overline{SD} \tag{10.2}$$

$$\overline{SB} : \overline{AB} = \overline{SD} : \overline{CD} \tag{10.3}$$

10.2.2 2. Strahlensatz

Die Parallelabschnitte verhalten sich gleich wie die entsprechenden Schenkelabschnitte.

$$\overline{AC} : \overline{BD} = \overline{SC} : \overline{SD} = \overline{SA} : \overline{SB} \tag{10.4}$$

10.3 Änhlichkeit am Kreis

10.3.1 Sehnensatz

Schneiden sich 2 Sehnen in einem Punkt P, so gilt: Das Produkt der Längen der Sehnenabschnitte der einen Sehne ist gleich dem Produkt der Längen der Sehnenabschnitte der anderen Sehne.

$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD} \tag{10.5}$$

10.3.2 Sekantensatz

Schneiden sich 2 Sekanten außerhalb einer Kreislinie in einem Punkt P, so gilt: Das Produkt der Längen der Sekantenabschnitte (von P aus) der einen Sekante ist gleich dem Produkt der Längen der Sekantenabschnitte der anderen Sekante.

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP} \cdot \overline{DP} \tag{10.6}$$

10.3.3 Tangenzensatz

Schneiden sich eine Sekante und eine Tangente (welche den Kreis an Punkt M berührt) in einem Punkt P, so gilt: Das Produkt der Längen der Sekantenabschnitte (von P aus) ist gleich dem Quadrat der Tengantenstrecke $\overline{PM}$.

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = t^2 \tag{10.7}$$

11 Trigonometrie

11.1 Trigonometrische Funktionen

Sinus	$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$
Cosinus	$\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$
Tangens	$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$
Cotangens	$\frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$

Tabelle 11.1: Trigonometrische Funktionen

Kleine Eselsbrücke dazu. Für „HHAG" kann man einsetzen, was man möchte und sich merken kann. Am besten wohl den Namen einer bekannten Firma oder Person.

G	A	G	A	Gaga
H	H	A	G	Helly Hansen AG

11.2 Beziehungen trigonometrischer Funktionen

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{11.1}$$

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1 \tag{11.2}$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha \tag{11.3}$$

Die Tabelle 11.2 stellt die komplette Liste der Beziehungen dar.

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\sin\alpha$	-	$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	-	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	-	$\frac{1}{\cot\alpha}$
$\cot\alpha$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$	-

Tabelle 11.2: Beziehungen trigonometrischer Funktionen

11.3 Sinussatz

Das Verhältnis der Seiten zum Sinus des gegenüberliegenden Winkels ist im Dreieck konstant. Dieses Verhältnis ist gleich dem Durchmesser des Umkreises.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r \tag{11.4}$$

Daraus folgt, dass $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

11.4 Cosinussatz

Der Cosinussatz ist quasi der Satz des Pythagoras für Dreiecke ohne rechten Winkel.

Folgendes sind die Formeln:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \tag{11.5}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta \tag{11.6}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \tag{11.7}$$

Um die Formel einfacher zu lernen kann man sich merken, dass erst der normale Pythagoras enthalten ist ($a^2 = b^2 + c^2$), danach jedoch ein Korrekturterm abgezogen wird. Da $\cos 90° = 0$, wird für den rechten Winkel nichts abgezogen.

11.5 Satzgruppe des Pythagoras

11.5.1 Höhensatz

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe gleich dem Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten.

$$h^2 = p \cdot q \tag{11.8}$$

11.5.2 Kathetensatz

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

$$a^2 = c \cdot p \tag{11.9}$$
$$b^2 = c \cdot q \tag{11.10}$$

11.6 Trigonometrische Kurven

11.6.1 Allgemeine Form

$y = a \cdot \sin(bx + c) + d$

- a: Streckung parallel y-Achse (hat Einfluss auf den Wertebereich)
- b: Erhöhung der Frequenz (schlankere Kurve); Strecckung parallel zur x-Achse (Faktor $\frac{1}{b}$)
- c: Verschiebung in x-Richtung. Nach links, wenn $c > 0$; nach rechts wenn $c < 0$
- d: Verschiebung in y-Richtung. Nach oben wenn $d > 0$; nach unten wenn $d < 0$

12 Vektoren

12.1 Begriffe

Skalar Nach Festlegung einer **Einheit** und Angabe einer **einzigen Zahl** vollständig bestimmt.

Vektor Zur Festlegung ist neben der **Zahl** noch die **Richtung** nötig. $|v|$ ist Betrag des Vektors v.

Nullvektor Vektor mit dem Betrag 0.

Gleichheit Zwei Vektoren sind gleich wenn:

- Gleicher Betrag
- Gleiche Richtung
- Gleicher Richtungssinn

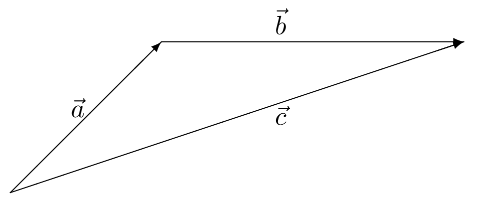
Kollineare Vektoren Parallel, anti-parallel oder auf gleicher Gerade.
Algebraisch ausgedrückt: **linear abhängig** ($\vec{b} = \lambda\vec{a}$).
Zwei Vektoren sind **selten kollinear**.

Komplanare Vektoren Vektoren, welche alle auf der gleichen Fläche liegen.
Algebraisch ausgedrückt: **linear Kombination** ($\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$).
Zwei Vektoren sind **stets komplanar**.

12.2 Vektor, Skalar

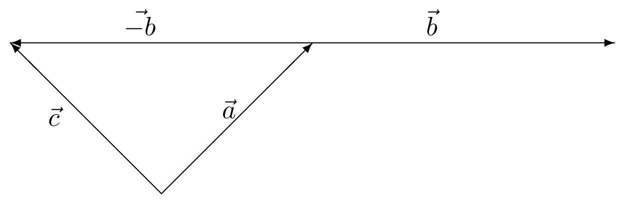
12.2.1 Addition

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$



12.2.2 Subtraktion

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$



12.3 Rechnen mit Vektoren

12.3.1 Multiplikation

Skalar s und Vektor a: $b = sa$: $|b| = s|a|$. Richtung von b ist gleich Richtung von a, wenn $s > 0$.

12.4 Rechnen mit Komponenten

12.4.1 Summe

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

12.4.2 Differenz

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

12.4.3 Vielfaches

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x_1 \\ k \cdot y_1 \end{pmatrix}$$

12.5 Vektoren im Koordinatensystem

12.5.1 Länge des Ortsvektors

Ortsvektor $\vec{r} = \vec{OP} = \vec{OP'} + \vec{P'P}$. Der Ortsvektor als skalare Komponenten ist $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Berechnung der Länge (Betrag) des Ortsvektors: $|\vec{r}| = \sqrt{\vec{OP'}^2 + \vec{P'P}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

12.5.2 Das Skalarprodukt

Skalares Produkt zweier Vektoren ist das Produkt aus ihren Beträgen und dem Cosinus des Zwischenwinkels: $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = a \cdot b \cdot \cos\alpha}$. Daraus ergibt sich, dass $\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b}}$.

12.5.2.1 Spezialfälle

Rechter Winkel: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90° = 0$ (siehe Abschnitt 12.5.2.4 auf der nächsten Seite)

Paralelle Vektoren: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \Rightarrow \cos\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0°$

Entgegengesetzte Vektoren: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -a \cdot b \Rightarrow \cos\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 180°$

Gleiche Vektoren: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos 0° = a^2$

12.5.2.2 Rechengesetze

Assoziatives Gesetz: Ist ungültig: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Kommutatives Gesetz: Ist gültig: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Distributives Gesetz: Ist gültig: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

12.5.2.3 Skalarprodukt

Gegeben:	$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$
Gesucht:	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$
Lösung:	$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

12.5.2.4 Rechter Winkel

Oft wird ein Vektor gesucht, welcher auf zwei anderen senkrecht steht. Dazu kann folgende Formel verwendet werden.

Ausgehend von den beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \tag{12.1}$$

Dabei muss man sich eigentlich nur die Formel für x merken, da bei y und z der Index jeweils zyklisch vertauscht wird. „uv minus uv, 23 minus 32” lässt sich recht einfach merken.

12.5.3 Die Gerade

12.5.3.1 Parametergleichung

Aufenthaltsort von $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ zur Zeit t: $\vec{r} = \vec{r_0} + t \cdot \vec{v}$.

t	Parameter, $t \in \Re$
$\vec{r_0}$ und $\vec{r}$	Ortsvektoren, sie gehen immer vom Ursprung des Koordinatensystems aus.
$\vec{v}$	freier Vektor

12.5.3.2 Schnittpunkt

Es kann geprüft werden, ob der Punkt P auf der Gerade g liegt. Dazu müssen die Koordinaten in die Parametergleichung eingesetzt werden.

gegeben: Parametergleichung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

gesucht: Liegt $Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$ auf $\vec{r}$?

$$\left.\begin{array}{rll} 5 & = 10 + 5t & \Rightarrow t = \quad -1 \\ 4 & = 3 - t & \Rightarrow t = \quad -1 \\ -12 & = -12 + 3t & \Rightarrow t = \quad 0 \end{array}\right\} \Rightarrow R \notin \vec{r}$$

gesucht: Liegt $r = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ auf $\vec{r}$?

$$\left.\begin{array}{rlll} 20 & = 10 + 5t & \Rightarrow t = & 2 \\ 1 & = 3 - t & \Rightarrow t = & 2 \\ -6 & = -12 + 3t & \Rightarrow t = & 2 \end{array}\right\} \Rightarrow P \in \vec{r}$$

12.5.4 Spurpunkte

Die **Durchstosspunkte** einer Geraden mit den Koordinatenebenen heissen **Spurpunkte**.

Zur Berechnung der drei Spurpunkte $S_1(x/y/0)$, $S_2(0/y/z)$ und $S_3(x/0/z)$ wird jeweils der Parameter t anhand der bekannten Koordinate berechnet.

12.5.4.1 Beispiel

Welches sind die Spurpunkte von g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$?

Spurpunkt $S_1(x/y/0)$

$$\left.\begin{array}{rcll} 0 = & 2 - t & \Rightarrow \mathbf{t = 2} & z = 0 \\ x = & 5 + t & = 5 + 2 & x = 7 \\ y = & 2 - t & = 2 \cdot 2 & y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow S_1 \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Spurpunkt $S_2(0/y/z)$

$$\left.\begin{array}{rcll} 0 = & 5 + t & \Rightarrow \mathbf{t = \text{-}5} & x = 0 \\ y = & 2t & = 2 \cdot -5 & y = -10 \\ z = & 2 - t & = 2 + 5 & z = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow S_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Spurpunkt $S_3(x/0/z)$

$$\left.\begin{array}{rcll} 0 = & 2t & \Rightarrow \mathbf{t = 0} & y = 0 \\ x = & 5 + t & 5 + 0 & x = 5 \\ z = & 2 - t & = 2 - 0 & z = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow S_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A Notationen

Einige verwendete Notationen, die mir nicht immer gleich klar sind.

Menge mit 0: $\mathbb{R}^+$
Meint die Menge $\mathbb{R}$ inklusive der Zahl 0.

Menge ohne eine Zahl: $\mathbb{R}^+ \backslash 1$
Meint die Menge $\mathbb{R}^+$ ohne die 1.

Geht gegen: $x \to \infty$
x geht gegen Unendlich.

Daraus folgt: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$
$x + 2 = 0$, daraus folgt dass $x = -2$.

B GNU Free Documentation License

Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other written document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

B.1 Applicability and Definitions

This License applies to any manual or other work that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. The "Document", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "you".

A "Modified Version" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A "Secondary Section" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (For example, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The "Invariant Sections" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License.

The "Cover Texts" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License.

A "Transparent" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, whose contents can be viewed and edited directly and straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup has been designed to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. A copy that is not "Transparent" is called "Opaque".

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML designed for human modification. Opaque formats include PostScript, PDF, proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML produced by some word processors for output purposes only.

The "Title Page" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

B.2 Verbatim Copying

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

B.3 Copying in Quantity

If you publish printed copies of the Document numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a publicly-accessible computer-network location containing a complete Transparent copy of the Document, free of added material, which the general network-using public has access to download anonymously at no charge using public-standard network protocols. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

B.4 Modifications

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

- Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.
- List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has less than five).
- State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.
- Preserve all the copyright notices of the Document.
- Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.
- Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.
- Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.
- Include an unaltered copy of this License.
- Preserve the section entitled "History", and its title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.
- Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.
- In any section entitled "Acknowledgements" or "Dedications", preserve the section's title, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.
- Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.
- Delete any section entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.
- Do not retitle any existing section as "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties – for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

B.5 Combining Documents

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections entitled "History" in the various original documents, forming one section entitled "History"; likewise combine any sections entitled "Acknowledgements", and any sections entitled "Dedications". You must delete all sections entitled "Endorsements."

B.6 Collections of Documents

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

B.7 Aggregation With Independent Works

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, does not as a whole count as a Modified Version of the Document, provided no compilation copyright is claimed for the compilation. Such a compilation is called an "aggregate", and this License does not apply to the other self-contained works thus compiled with the Document, on account of their being thus compiled, if they are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one quarter of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that surround only the Document within the aggregate. Otherwise they must appear on covers around the whole aggregate.

B.8 Translation

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License provided that you also include the original English version of this License. In case of a disagreement between the translation and the original English version of this License, the original English version will prevail.

B.9 Termination

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

B.10 Future Revisions of This License

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See http://www.gnu.org/copyleft/.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License ör any later versionäpplies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

> Copyright © YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.1 or any later version published by the Free Software Foundation; with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

If you have no Invariant Sections, write "with no Invariant Sections" instead of saying which ones are invariant. If you have no Front-Cover Texts, write "no Front-Cover Texts" instead of "Front-Cover Texts being LIST"; likewise for Back-Cover Texts.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.

Literaturverzeichnis

[BSMM00] Ilja N. Bronstein, Konstantin A. Semendjajew, Gerhard Musiol, and Heiner Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harris Deutsch, Gräfstraße 47, D-60486 Frankfurt am Main, http://www.harri-deutsch.de/verlag/, 5. edition, 2000.